第 8 章　模糊变换与模糊综合评价

模糊映射与模糊变换，是建立在模糊关系的理论基础之上的，同时它们又是模糊综合评价和模糊推理的理论基础。

本章主要介绍两方面的内容：模糊映射与模糊变换，模糊综合评价方法。

8.1　模糊变换

由论域 X 到 Y 的点映射 $f: X \to Y$ 出发，通过扩张原理，可以扩展(诱导)出一个从 $\mathcal{F}(X)$ 到 $\mathcal{F}(Y)$ 的映射 $f: \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(Y)$，使得 X 上的每一个模糊集合 A 都有一个 Y 上的模糊集合 B 与之对应；也可以扩展(诱导)出一个从 $\mathcal{F}(Y)$ 到 $\mathcal{F}(X)$ 的映射 $f: \mathcal{F}(Y) \to \mathcal{F}(X)$，使得 Y 上的每一个模糊集合 B 都有一个 X 上的模糊集合 A 与之对应。实际上，我们还可以一般性地讨论从一个论域的模糊幂集到另一个论域的模糊幂集上的映射，即所谓的模糊变换。

定义 1　设 X 和 Y 是两个给定的论域，称映射

$$\begin{aligned} T: \mathcal{F}(X) &\to \mathcal{F}(Y) \\ A &\mapsto B = T(A) \end{aligned} \tag{8.1}$$

为从论域 X 到论域 Y 的**模糊变换**；称 $B = T(A)$ 为 A 在模糊变换 T 下的**象**，A 为 B 的**原象**。

显然，扩张原理将 X 到 Y 的点映射扩展成为 X 到 Y 的模糊变换。

在经典集合论中，映射与二元关系有着很强的内在联系：映射描述的是两集合之间有限定条件的对应，二元关系描述是两集合之间不加限定的对应，映射是特殊的。在模糊集合论中，模糊变换与模糊二元关系也存在着类似的情形，只不过我们更关心的是由模糊关系诱导出的模糊变换。

定理 1　设 X 和 Y 是两个给定的论域，$R \in \mathcal{F}(X \times Y)$。则 R 唯一确定一个从 X 到 Y 的模糊变换 $T_R: \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(Y)$，使得 $\forall A \in \mathcal{F}(X)$ 均有

$$T_R(A) = A \circ R \in \mathcal{F}(Y)$$

其中

$$(A \circ R)(y) = \bigvee_{x \in X} [A(x) \wedge R(x, y)]，\ y \in \mathcal{F}(Y) \tag{8.2}$$

我们称 T_R 为**由模糊关系 R 诱导出的模糊变换**。

定理 1 的直观解释如图 1 所示。

在一个单输入、单输出的系统中，一般通过转换器来表达输入和输出之间的内在联系，转换器通常是一个数学模型。比如，在线性定常系统中，转换器就是所谓的传递函数，它反映的是零状态条件下输入信号的 Laplace 变换 $X(s)$ 和输出信号的 Laplace 变换 $Y(s)$ 之间的线性映射关系。

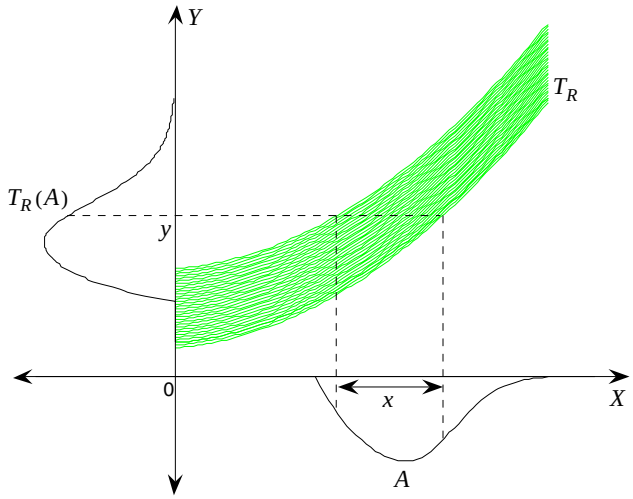

图 1　由模糊关系诱导的模糊变换

在实际应用中，系统的输入、输出之间未必存在确定的映射关系，可能是不确定的模糊关系；输入和输出也未必是确定的变量，可能是不确定的模糊变量。如果再用类似于传递函数这样的经典数学模型来刻画系统的转换器，显然就很不合适。此时，可选择的一个处理方式就是：通过建立输入和输出之间的模糊关系 R，并由此模糊关系诱导一个模糊变换 T_R，用模糊变换 T_R 来刻画系统的转换器，形成合适的模糊数学模型，如图 2 所示。

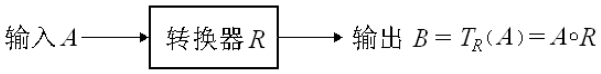

图 2　模糊变换作为系统转换器

例 1　人的体重与身高存在着一定的内在联系，但本质上构成的是模糊关系。某地区从遗传、环境、饮食等方面对男少年这个群体进行了综合考察，选取体重论域为 $X = \{40, 50, 60, 70, 80\}$（单位：kg），身高论域为 $Y = \{1.4, 1.5, 1.6, 1.7, 1.8\}$（单位：m），得到了描述本地区男少年的体重与身高之间关系的模糊二元关系 R：

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0.8 & 0.2 & 0.1 & 0 \\ 0.8 & 1 & 0.8 & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 & 1 & 0.8 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.8 & 1 & 0.8 \\ 0 & 0.1 & 0.2 & 0.8 & 1 \end{pmatrix}$$

另一方面，“标准体重”、“标准身高”分别是体重论域和身高论域上的模糊集合。经过调查和评估得知，描述本地区“男少年标准体重”的模糊集合为 $A = (0.8, 1, 0.6, 0.2, 0)$。

由于模糊关系 R 确定了一个从 X 到 Y 的模糊变换 $T_R: \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(Y)$，因此通过模糊变换 T_R，可以求得描述本地区“男少年标准身高”的模糊集合为

$$B = A \circ R = (0.8,\ 1,\ 0.6,\ 0.2,\ 0) \circ \begin{pmatrix} 1 & 0.8 & 0.2 & 0.1 & 0 \\ 0.8 & 1 & 0.8 & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 & 1 & 0.8 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.8 & 1 & 0.8 \\ 0 & 0.1 & 0.2 & 0.8 & 1 \end{pmatrix} = (0.8,\ 1,\ 0.8,\ 0.6,\ 0.2) \in \mathscr{F}(Y)$$

需要注意的是，一般来讲定理 1 中 R 确定的是模糊变换，但有几种不同的情形：

(1) 关系 R 是模糊二元关系时，它诱导出一个从 X 到 Y 的模糊变换 T_R：将 X 上的模糊集合变换为 Y 上的模糊集合，如例 1。这是最一般的情形。

(2) 关系 R 是模糊二元关系时，它诱导出一个从 X 到 Y 的模糊变换 T_R：将 X 上经典集合变换为 Y 上的模糊集合。例如，若 $A = (1, 1, 0) \in \mathscr{P}(X)$，

$$R = \begin{pmatrix} 0.2 & 1 & 0.5 & 0 \\ 0.1 & 0.3 & 0.9 & 1 \\ 0 & 0.4 & 1 & 0.1 \end{pmatrix}$$

则 $T_R(A) = A \circ R = (0.2, 0.3, 0.9, 1) \in \mathscr{F}(Y)$，下一节将要讨论的模糊映射是这种情形的特例。

(3) 关系 R 退化为经典二元关系时，它仍然诱导出一个从 X 到 Y 的模糊变换 T_R：将 X 上的模糊集合变换为 Y 上的模糊集合。例如，若 $A = (0.5, 0.1, 0.3) \in \mathscr{F}(X)$，

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

则 $T_R(A) = A \circ R = (0.5, 0.3, 0.5, 0.1) \in \mathscr{F}(Y)$，模糊集合的扩张原理将 X 到 Y 的点映射扩展成 $\mathscr{F}(X)$ 到 $\mathscr{F}(Y)$ 的映射，就是这种情形。

(4) 关系 R 退化为经典二元关系时，它诱导出一个退化的从 X 到 Y 的模糊变换 T_R：将 X 上的经典集合变换为 Y 上的经典集合。例如，若 $A = (1, 1, 0) \in \mathscr{P}(X)$，

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

则 $T_R(A) = A \circ R = (1, 0, 1, 1) \in \mathscr{P}(Y)$，经典集合的扩张原理将 X 到 Y 的点映射扩展成 $\mathscr{P}(X)$ 到 $\mathscr{P}(Y)$ 的映射，就是这种情形。

根据定理 1，由模糊关系 R 诱导出的模糊变换 $T_R(A) = A \circ R$，本质上就是模糊关系的合成，因此模糊关系合成运算所具有的性质对 T_R 同样成立，不再赘述。我们下面所关注的是 T_R 的线性性。

定义 2 设 X 和 Y 是两个给定的论域，T 为从 X 到 Y 的模糊变换。若 $\forall A, B \in \mathscr{F}(X)$ 都有

(1) $T(A \cup B) = T(A) \cup T(B)$

(2) $T(aA) = a \cdot T(A)$，$a \in [0, 1]$

则称 T 是**模糊线性变换**。

定理 2　设 X 和 Y 是两个给定的论域，$R \in \mathcal{F}(X \times Y)$。则由 R 诱导出的模糊变换是模糊线性变换。

证明　设 T_R 为由 T 诱导出的模糊变换，则 $\forall A \in \mathcal{F}(X)$ 均有

$$T_R(A) = A \circ R \in \mathcal{F}(Y)$$

于是由模糊关系合成的性质，对 $\forall A, B \in \mathcal{F}(X)$ 有

$$T_R(A \cup B) = (A \cup B) \circ R = (A \circ R) \cup (B \circ R) = T_R(A) \cup T_R(B)$$

又对于 $\forall A \in \mathcal{F}(X)$ 及 $\forall a \in [0, 1]$

$$T_R(aA) = [(aA) \circ R](y) = \bigvee_{x \in X} [(a \wedge A(x)) \wedge R(x, y)] = a \wedge \left\{ \bigvee_{x \in X} [A(x) \wedge R(x, y)] \right\}$$

$$= a \wedge [(A \circ R)(y)] = a \cdot T_R(A)$$

因此，由定义 1，T_R 是模糊线性变换。

推论　设 X 和 Y 是两个给定的论域，$R \in \mathcal{F}(X \times Y)$，$A_i \in \mathcal{F}(X)$，$a_i \in [0, 1]$，$i = 1, 2, ..., n$。则

$$T_R\left(\bigcup_{i=1}^{n} (a_i A_i) \right) = \bigcup_{i=1}^{n} [a_i T_R(A_i)]$$

8.2　模糊映射

上一节曾经提到，从论域 X 到 Y 的模糊关系 R 所诱导的模糊变换 T_R 将 X 上经典集合仍然变换为 Y 上的模糊集合，特别地，将 X 上单点集仍然变换为 Y 上的模糊集。由于模糊变换的这种特例具有特殊意义，因而这一节从一般映射的角度来单独讨论从 X 到 $\mathcal{F}(Y)$ 的映射。

定义 3　设 X 和 Y 是两个给定的论域，称映射

$$\begin{aligned} f &: X \to \mathcal{F}(Y) \\ x &\mapsto B = f(x) \end{aligned} \tag{8.3}$$

为从论域 X 到论域 Y 的**模糊映射**。

由定义 3 可知，模糊映射是这样一种对应关系：X 中的任一元素 x 与 Y 上唯一确定的模糊集合 B 对应。

例 2　考虑例 1 中的模糊二元关系 R：

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0.8 & 0.2 & 0.1 & 0 \\ 0.8 & 1 & 0.8 & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 & 1 & 0.8 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.8 & 1 & 0.8 \\ 0 & 0.1 & 0.2 & 0.8 & 1 \end{pmatrix}$$

显然，模糊关系 R 描述的是每个体重取值和每个身高取值之间的联系(关系)程度。

记 $X = \{40, 50, 60, 70, 80\} = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$，$Y = \{1.4, 1.5, 1.6, 1.7, 1.8\} = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\}$，那么

(1) 模糊矩阵 R 的第 i 行可以看做是 Y 上的一个模糊集合，这样的模糊集合既可描述某个体重取值 x_i 与每个身高取值 y_j ($j = 1, \ldots, 5$) 之间的关系程度(即从 $\{x_i\}$ 到 Y 的模糊二元关系)，又可描述模糊概念“体重 x_i 公斤下的身高”。

(2) 模糊矩阵 R 的第 j 列可以看做是 X 上的一个模糊集合，这样的模糊集合既可描述某个身高取值 y_j 与每个体重取值 x_i ($i = 1, \ldots, 5$) 之间的关系程度(即从 $\{y_j\}$ 到 X 的模糊二元关系)，又可描述模糊概念“身高 y_j 米下的体重”。

如果令 $f: X \to \mathcal{F}(Y)$ 使得

$$x_1 \mapsto f(x_1) = \frac{1}{y_1} + \frac{0.8}{y_2} + \frac{0.2}{y_3} + \frac{0.1}{y_4} + \frac{0}{y_5}, \quad x_2 \mapsto f(x_2) = \frac{0.8}{y_1} + \frac{1}{y_2} + \frac{0.8}{y_3} + \frac{0.2}{y_4} + \frac{0.1}{y_5}$$

$$x_3 \mapsto f(x_3) = \frac{0.2}{y_1} + \frac{0.8}{y_2} + \frac{1}{y_3} + \frac{0.8}{y_4} + \frac{0.2}{y_5}, \quad x_4 \mapsto f(x_4) = \frac{0.1}{y_1} + \frac{0.2}{y_2} + \frac{0.8}{y_3} + \frac{1}{y_4} + \frac{0.8}{y_5}$$

$$x_5 \mapsto f(x_5) = \frac{0}{y_1} + \frac{0.1}{y_2} + \frac{0.2}{y_3} + \frac{0.8}{y_4} + \frac{1}{y_5}$$

则 f 是从 X 到 Y 的模糊映射。如果令 $g: Y \to \mathcal{F}(X)$ 使得

$$y_1 \mapsto g(y_1) = \frac{1}{x_1} + \frac{0.8}{x_2} + \frac{0.2}{x_3} + \frac{0.1}{x_4} + \frac{0}{x_5}, \quad y_2 \mapsto g(y_2) = \frac{0.8}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{0.8}{x_3} + \frac{0.2}{x_4} + \frac{0.1}{x_5}$$

$$y_3 \mapsto g(y_3) = \frac{0.2}{x_1} + \frac{0.8}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{0.8}{x_4} + \frac{0.2}{x_5}, \quad y_4 \mapsto g(y_4) = \frac{0.1}{x_1} + \frac{0.2}{x_2} + \frac{0.8}{x_3} + \frac{1}{x_4} + \frac{0.8}{x_5}$$

$$y_5 \mapsto g(y_5) = \frac{0}{x_1} + \frac{0.1}{x_2} + \frac{0.2}{x_3} + \frac{0.8}{x_4} + \frac{1}{x_5}$$

则 g 是从 Y 到 X 的模糊映射。

反之，如果我们知道从 X 到 Y 的模糊映射 f 或者从 Y 到 X 的模糊映射 g，由它们又可以构造一个从 X 到 Y 的模糊二元关系 R 或者从 Y 到 X 的模糊二元关系 R^{T}。

定义 4 设 X 和 Y 是两个给定的论域，$R \in \mathcal{F}(X \times Y)$。

(1) 每个 $x \in X$，对应着 Y 上的一个模糊集合，记作 $R|_x$，它具有隶属函数

$$R|_x(y) = R(x, y), \quad \forall y \in Y$$

则称 $R|_x$ 为 R 在 x 处的**截影**。

(2) 每个 $y \in Y$，对应着 X 上的一个模糊集合，记作 $R|_y$，它具有隶属函数

$$R|_y(x) = R(x, y), \quad \forall x \in X$$

则称 $R|_y$ 为 R 在 y 处的**截影**。

定理 3 设 X 和 Y 是两个给定的论域，则任意 $R \in \mathcal{F}(X \times Y)$，都唯一确定一个从 X 到 Y 的模糊映射，记作

$$f_R: X \to \mathcal{F}(Y)$$

使得 $\forall x \in X$ 均有 $f_R(x) = R|_x$。

反之，任给一个从 X 到 Y 的模糊映射 $f: X \to \mathcal{F}(Y)$，都唯一确定一个模糊关系，记作

$$R_f \in \mathcal{F}(X \times Y)$$

使得 $\forall x \in X$ 均有 $R_f|_x = f(x)$。

结合定理 1 与定理 3，我们有：设 X 和 Y 是两个给定的论域，则从 X 到 Y 的模糊映射 $f: X \to \mathcal{F}(Y)$，可以诱导一个从 X 到 Y 的模糊关系 $R_f \in \mathcal{F}(X \times Y)$，进而又可诱导一个从 X 到 Y 的模糊变换 T_{R_f}，简记为 T_f。我们称 T_f 为**由模糊映射 f 诱导的模糊变换**。

8.3 模糊综合评价

在现实生活中，人们常常需要对某一事物或现象进行总体评价，而作为被评价对象的事物或现象又往往是一个由相互关联、相互制约的众多因素构成的复杂系统。因此，评价过程中必须综合考虑各个因素的影响，以提高最终评价结果的科学性和准确性。这种对多因素复杂系统进行的总体评价，称为多变量综合评价或多变量综合评判，简称为**综合评价**或**综合评判**。综合评价问题是多因素、多层次决策过程中所遇到的一个带有普遍意义的问题，它是系统工程的基本环节。

模糊综合评价是一种基于模糊数学的综合评价，被评价对象通常是模糊事物或现象，即由众多具有模糊性的因素构成的复杂系统。模糊综合评价利用隶属函数对模糊因素进行量化，通过建立模糊关系来构造模糊变换，进而对模糊事物或现象实施总体评价。

8.3.1 模糊综合评价问题的引入

对于一个系统(如一种事物、一类现象、一个产品、一个人等)进行总体评价，往往不是只根据某一因素(指标)去判断，而是要考虑多个因素(指标)的综合影响；可能的评价结果也常常由多个抉择等级(分数或评语)来表述。比如，体操男子个人全能赛是对运动员竞技运动素质的一种综合评价，它所考虑的因素(指标)共 6 个：单杠、跳马、吊环、双杠、鞍马和自由操，最终的评价结果共有 100000 个抉择等级(总分 100 分，计算到小数点后 3 位)；而研究生入学考试则是对考生是否符合研究生入学标准进行的一种综合评价，它所考虑的因素(指标)共 4 个：英语、政治、数学和专业课，最终的评价结果共有 500 个抉择等级(总分 500 分)。

在实际操作中，人们惯常使用的综合评价方法有两类：评分、加总(或平均)，如体操男子个人全能赛；评分、加权加总(或加权平均)，如研究生入学考试。

然而，现实中很多被评价对象的构成因素具有模糊性，如“表现”、“掌握程度”、“式样或款式”等；同时，作为评价结果的抉择等级有时难以用一个简单分数加以评价，也具有模糊性，如“优秀”、“较好”、“喜欢”等。这种被评价对象的构成因素以及抉择等级都具有模糊性的综合评价问题，就是模糊综合评价问题。

例 3　对研究生的学业情况进行考核和评定，其中非常重要的一项是毕业论文的评价。假设论文的评价包括选题、观点及论证、学术成果、文献综述、写作及文风、答辩情况等 6 个方面(因素或指标)，评价的结论分为优秀、良好、中等、及格和不及格五个等级(抉择等级或评语)。如何具体地对一名研究生的毕业论文进行综合评价？

由于考核的 6 个因素均具有一定的模糊性，同时评语也具有模糊性，因此，这是一个模糊综合评价问题。

8.3.2　模糊综合评价数学模型

对于一个模糊综合评价问题，如果 $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ 为被评价对象的 n 个因素构成的集合，则称其为**因素集**；如果 $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ 是以评价者对评价对象可能作出的 m 种抉择等级(评语，即评价结果)为元素构成的集合，则称其为**评价集**。

评价者的任务之一就是在 n 个因素和 m 个评语之间建立对应关系。由于许多因素具有模糊性，评价者对每个因素与 m 个抉择等级的对应也并非绝对地肯定或否定，因而，n 个因素和 m 个评语之间的对应关系通常是模糊矩阵(模糊二元关系)，称之为**评价矩阵**，其形式为

$$R = \begin{array}{c} \\ u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & \cdots & v_m \end{array} \\ \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1m} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nm} \end{pmatrix} \end{array} \tag{8.4}$$

根据定理 3，评价矩阵 R 确定一个从 U 到 V 的模糊映射 $f_R: U \to \mathcal{F}(V)$，其第 i 行描述单因素 u_i 相对于各个抉择等级 v_j ($j = 1, 2, ..., m$) 的对应关系程度。因此，R 的第 i 行是对因素 u_i 进行的**单因素模糊评价**，称之为因素 u_i 的**评价向量**，元素 r_{ij} 是单因素 u_i 的评价对抉择等级 v_j 的隶属度。

例 3(续)　对于一名研究生的毕业论文，如果分别就各个因素进行评价，则 6 个因素与 5 个评语之间的对应关系可以是如下的模糊二元关系

$$R = \begin{bmatrix} 0.30 & 0.60 & 0.10 & 0.00 & 0.00 \\ 0.50 & 0.40 & 0.05 & 0.05 & 0.00 \\ 0.60 & 0.25 & 0.10 & 0.05 & 0.00 \\ 0.50 & 0.30 & 0.15 & 0.05 & 0.00 \\ 0.50 & 0.50 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.90 & 0.10 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \end{bmatrix}$$

其每一行都是一个单因素模糊评价。例如，第 1 行表示这名研究生的毕业论文选题相对于优秀、良好、中等、及格和不及格 5 个抉择等级的模糊关系程度，而第 1 行第 1 列的元素 0.3 表示“论文选题”这个因素的评价对抉择等级“优秀”的隶属度。

一般来讲，各种因素在不同类型的人们心目中对最终评价结果的影响程度是不同的，因而各因素对最终评价结果的影响程度可以看做是 U 上的模糊子集 $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathcal{F}(U)$。$A$ 称为 U 的**因素重要程度模糊子集**(简称为**因素模糊子集**)，a_i 称为**因素的重要程度系数**，是第 i 种因素对最终评价结果影响程度的度量，它的作用是调整或限制单因素 u_i 的评价对抉择等级 v_j 的隶属度，在一定程度上代表着单因素 u_i 评定最终等级的能力。有时，也用普通的权系数代替因素重要程度系数。

因为模糊关系 R 可以诱导出一个从 U 到 V 的模糊变换 T_R，则 $T_R(A) = A \circ R \in \mathcal{F}(Y)$ 就是综合考虑 n 个因素后得到的综合评价结果，它是 V 上的一个模糊集合，称之为**抉择等级模糊集**。如果令

$$B = T_R(A) = A \circ R = (b_1, b_2, \ldots, b_m) \tag{8.5}$$

则(8.5)式就构成模糊综合评价的数学模型，其中 b_j 反映了第 j 个抉择等级在综合评价结果中所占的地位。

例 3(续)　如果设因素集和评价集分别为

$$U = \{ u_1(\text{选题}),\ u_2(\text{观点及论证}),\ u_3(\text{学术成果}),$$
$$u_4(\text{文献综述}),\ u_5(\text{写作及文风}),\ u_6(\text{答辩情况})\}$$
$$V = \{v_1(\text{优秀}),\ v_2(\text{良好}),\ v_3(\text{中等}),\ v_4(\text{及格}),\ v_5(\text{不及格})\}$$

参照一般的硕士论文评价方法，各因素 u_1、u_2、u_3、u_4、u_5、u_6 的重要程度系数可分别取为 $a_1 = 0.3$，$a_2 = 0.3$，$a_3 = 0.2$，$a_4 = 0.1$，$a_5 = 0.05$，$a_6 = 0.05$，即因素重要程度模糊子集为

$$A = (0.3, 0.3, 0.2, 0.1, 0.05, 0.05)$$

则根据模糊综合评价的数学模型(8.5)式，可得抉择等级模糊集为

$$B = (b_1, b_2, \ldots, b_m) = T_R(A) = A \circ R = (0.3\ \ 0.3\ \ 0.2\ \ 0.1\ \ 0.05\ \ 0.05) \circ \begin{bmatrix} 0.30 & 0.60 & 0.10 & 0.00 & 0.00 \\ 0.50 & 0.40 & 0.05 & 0.05 & 0.00 \\ 0.60 & 0.25 & 0.10 & 0.05 & 0.00 \\ 0.50 & 0.30 & 0.15 & 0.05 & 0.00 \\ 0.50 & 0.50 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.90 & 0.10 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \end{bmatrix}$$

由于模糊关系的广义合成运算为 S–T 形式，因此选取不同的 T 模和 S 模，模型(8.5)就会形成不同的具体模型。模糊综合评价中常用的有五种模型。

模型 I：$M(\wedge,\vee)$

$$B = (b_1, b_2, \ldots, b_m),\quad b_j = \bigvee_{i=1}^{n} (a_i \wedge r_{ij}),\quad j = 1, 2, \ldots, m$$

这个模型是模糊综合评价的初始模型。由于 max–min 合成会丢失次要信息，因此该模型的评价结果很大程度上取决于在总体评价过程中起主要作用的那个因素，其余因素在一个范围内变化都不影响评价结果，故通常也称之为**主因素决定型**。此模型比较适用于单项评价最优就能算作综合评价最优的情况。

使用此模型时应该注意：因素重要程度模糊集 A 的各元素 a_i 为多因素时 r_{ij} 的调整系数，即各因素可取

的上限值，故不能取为普通的权系数。否则，各个 a_i 的值必然很小，这将使得综合评价结果值 b_j 也都很小。这样，较小的权值 a_i 通过取小运算会湮没单因素评价，从而得不出有意义的结果。即使在因素较少时，也不宜将 A 取作权向量，否则会使得主要因素起的单因素控制作用更加突出，在某种程度上失去了综合评价的意义。

模型 II：$M(\cdot,\vee)$

$$B = (b_1, b_2, \ldots, b_m),\quad b_j = \bigvee_{i=1}^{n}(a_i \cdot r_{ij}),\quad j = 1, 2, \ldots, m$$

该模型是模型 I 的一种变形，优点是能较好地反映单因素评价结果的重要程度。不过，即使数乘运算避免了丢失次要信息，但取大运算仍然强调在总体评价过程中起主要作用的那个因素，故通常也称之为**主因素突出型**。

与模型 I 类似，在此模型中 a_i 是在考虑多因素时 r_{ij} 的调整系数，与因素 u_i 的重要性有关，但没有普通权系数的含义。

模型 III：$M(\wedge, \oplus)$

$$B = (b_1, b_2, \ldots, b_m),\quad b_j = \min\left[1,\ \sum_{i=1}^{n}(a_i \wedge r_{ij})\right],\quad j = 1, 2, \ldots, m$$

该模型也是模型 I 的一种变形。它将 max 运算换为 Lukasiewicz S 模（为简便起见，这里用“⊕”表示 Lukasiewicz S 模），使得对主要因素强调得弱一些，兼顾了非主要因素，但此模型仍属于主因素突出型。

事实上，模型 $M(\cdot,\vee)$ 和模型 $M(\wedge, \oplus)$ 与模型 $M(\wedge,\vee)$ 很接近。但由于前两者的运算都比后者的运算精细，因而评判结果也更“细腻”，多少反映了非主要因素的作用。

模型 IV：$M(\cdot, \oplus)$

$$B = (b_1, b_2, \ldots, b_m),\quad b_j = \min\left[1,\ \sum_{i=1}^{n}(a_i \cdot r_{ij})\right],\quad j = 1, 2, \ldots, m$$

通常称该模型为**广义加权平均型**，其中数乘运算避免了丢失次要信息，而 Lukasiewicz S 模“⊕”则保证不是过分强调在总体评价过程中起主要作用的那个因素，能对所有因素依重要程度的大小均衡兼顾。

模型 V：$M(\cdot, +)$

$$B = (b_1, b_2, \ldots, b_m),\quad b_j = \sum_{i=1}^{n}(a_i \cdot r_{ij}),\quad j = 1, 2, \ldots, m,\quad \sum_{i=1}^{n} a_i = 1$$

由于 $\sum a_i = 1$，即 $\sum a_i r_{ij} \le 1$，所以此模型是模型 IV 中“⊕”蜕化为一般实数加法“+”的情形，即此模型是模型 IV 的特例，通常称之为**加权平均型**。

该模型的特点是，用普通的权系数代替因素重要程度系数，考虑了所有因素的影响，而且保留了单因素评价的全部信息，可适用于需要考虑各因素综合影响的情况。

人们对被评价对象的综合评价有不同的方式：有时只求单因素最优（此因素即为主因素）；有时突出主

要因素但也兼顾其它；有时不管单项最优值的大小，只求总和最大，等等。不同运算下的模型反映了这些不同的情况，具体应用哪一种模型要根据实际评价对象特点和评价侧重点不同加以选用。

例 3（续） (1) 利用主因素决定型综合评判模型 $M(\wedge, \vee)$，对这名研究生毕业论文的综合评价为：

$$B = (b_1, b_2, \ldots, b_m) = (0.3, 0.3, 0.1, 0.05, 0) \in \mathcal{F}(V)$$

如果采用最大隶属原则，则该研究生的毕业论文可被评价为“优”或者“良”。

如果采用加权平均原则，则首先对 B 进行归一化得到 $B' = (0.4, 0.4, 0.1333, 0.0667, 0)$，其次设“优”的分值为 $(100 + 90)/2 = 95$，“良”的分值为 $(90 + 80)/2 = 85$，“中等”的分值为 $(80 + 70)/2 = 75$，“及格”的分值为 $(70 + 60)/2 = 65$，“不及格”的分值为 55，于是，该研究生的毕业论文可被评价为

$$(0.4, 0.4, 0.1333, 0.0667, 0)(95, 85, 75, 65, 55)^{\mathrm{T}} = 86.3333$$

(2) 利用加权平均型综合评判模型 $M(\cdot, +)$，对这名研究生毕业论文的综合评价为：

$$B = (b_1, b_2, \ldots, b_m) = (0.48, 0.41, 0.08, 0.03, 0)$$

如果采用最大隶属原则，则该研究生的毕业论文可被评价为“优”。

如果采用加权平均原则，则首先对 B 进行归一化得到 $B' = (0.48, 0.41, 0.08, 0.03, 0)$，其次设“优”的分值为 $(100 + 90)/2 = 95$，“良”的分值为 $(90 + 80)/2 = 85$，“中等”的分值为 $(80 + 70)/2 = 75$，“及格”的分值为 $(70 + 60)/2 = 65$，“不及格”的分值为 55，于是，该研究生的毕业论文可被评价为

$$(0.48, 0.41, 0.08, 0.03, 0)(95, 85, 75, 65, 55)^{\mathrm{T}} = 88.4$$

接下来的问题就是如何确定因素重要程度模糊集 A，以及如何构造描述 n 个因素和 m 个评语之间的对应关系的评价矩阵 R。

1. 因素重要程度模糊集的确定

由于因素重要程度模糊集 A 中的元素 a_i 的作用是调整或限制单因素 u_i 的评价对抉择等级 v_j 的隶属度，在一定程度上代表着单因素 u_i 评定最终等级的能力，因此 A 本质上是一个模糊集。

建立因素重要程度模糊集 A 的常用方法有以下三种：

(1) 德尔菲（Delphi）法

德尔菲法，也称为专家评议法，它是利用专家集体智慧来确定各因素在评价问题或者决策问题中的重要程度系数的有效方法之一。

(2) 专家调查法

专家调查法，是把在评价或决策问题中所要考虑的各因素，根据研究问题的具体内容，聘请专家就各因素的重要程度发表意见，填入调查表，从而计算出因素重要程度系数。

(3) 层次分析（AHP）法

层次分析法（Analytic Hierarchy Process，简称 AHP）是美国运筹学家 T. L. Saaty 教授于上世纪 70 年代

初期提出的一种简便、灵活而又实用的多准则决策方法。它将 n 个因素排成一个 n 阶判断矩阵，专家通过对因素两两比较，根据各因素的重要程度来确定矩阵中元素值的大小，然后利用矩阵理论来确定各个因素的重要程度系数。

但需要注意的是：无论采用何种方法确定因素重要程度模糊集，都有人的主观因素的参与。

2. 评价矩阵的构造

构造评价矩阵是模糊综合评价中的一个重要环节，评价矩阵构造的是否合适，直接影响着最终的评价结果。同时，根据 n 个因素和 m 个评语直接构造评价矩阵也是一项非常困难的事情。

为此，通常采用的方法之一就是利用模糊关系与模糊映射之间的关系来构造评价矩阵。

一般来讲，评价矩阵 R 是一个模糊关系，它描述 n 个因素和 m 个评语之间的对应关系。根据定理 3 和(8.4)式，它诱导出一个从 U 到 V 的模糊映射 $f_R: U\to\mathcal{F}(V)$，使得

$$u_i\mapsto R_i = f(u_i) = (r_{i1}, r_{i2}, \ldots, r_{im}),\quad i = 1, 2, ..., n$$

其中 R_i 是对因素 u_i 进行的单因素模糊评价，即元素 r_{ij} 是单因素 u_i 的评价对抉择等级 v_j 的隶属度。

由于对因素 u_i 进行的单因素模糊评价相对容易得多，本质上就是建立模糊集的隶属函数，因此还是根据定理 3：首先对因素 u_i 进行单因素模糊评价，建立模糊集(u_i 的评价向量) $R_i = (r_{i1}, r_{i2}, \ldots, r_{im})$，形成一个从 U 到 V 的模糊映射 f: $U\to\mathcal{F}(V)$，使得 $f(u_i) = R_i$；然后由 f 诱导出一个从 U 到 V 的模糊模糊关系 $R_f\in\mathcal{F}(X\times Y)$，简记为 R，使得

$$R=\begin{pmatrix} R_1\\ R_2\\ \vdots\\ R_n\end{pmatrix}$$

则 R 即为要建立的评价矩阵。

例 3(续) 假设参与这名研究生论文评价的有导师、2 名论文评阅人和 5 名论文答辩委员，三类评价者的重要性权重分别为 0.25，0.5，0.25，三类评价者对该论文评价的平均成绩如下表

评价者类别	导师	评阅人		答辩委员				
		1	2	1	2	3	4	5
权重	0.25	0.25	0.25	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05
u_1(选题)	优	良	良	良	优	中	中	良
u_2(观点及论证)	优	优	良	良	良	良	中	及
u_3(学术成果)	优	优	良	优	优	中	中	及
u_4(文献综述)	优	优	良	良	中	中	中	及
u_5(写作及文风)	优	优	良	良	良	良	良	良
u_6(答辩情况)	优	优	优	优	优	优	良	良

则采取权重值作为评判值的单因素评判方法，可得单因素 u_1、u_2、u_3、u_4、u_5、u_6 的评价向量分别为

$R_1 = (0.30, 0.60, 0.10, 0.00, 0.00) \in \mathcal{F}(V)$，$R_2 = (0.50, 0.40, 0.05, 0.05, 0.00) \in \mathcal{F}(V)$

$R_3 = (0.60, 0.25, 0.10, 0.05, 0.00) \in \mathcal{F}(V)$，$R_4 = (0.50, 0.30, 0.15, 0.05, 0.00) \in \mathcal{F}(V)$

$R_5 = (0.50, 0.50, 0.00, 0.00, 0.00) \in \mathcal{F}(V)$，$R_6 = (0.90, 0.10, 0.00, 0.00, 0.00) \in \mathcal{F}(V)$

于是，可得这名研究生的毕业论文的评价矩阵为

$$R = \begin{pmatrix} 0.30 & 0.60 & 0.10 & 0.00 & 0.00 \\ 0.50 & 0.40 & 0.05 & 0.05 & 0.00 \\ 0.60 & 0.25 & 0.10 & 0.05 & 0.00 \\ 0.50 & 0.30 & 0.15 & 0.05 & 0.00 \\ 0.50 & 0.50 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.90 & 0.10 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \end{pmatrix}$$

8.3.3 多级模糊综合评价

在复杂系统中，要考虑的因素往往很多，并且各因素之间还有层次之分。在这种复杂的情况下，如果仍用前面给出的模糊综合评价初始模型，则每一因素分得的因素重要程度系数可能会很小。这样，在 A 与 R 作模糊合成运算时，就会丢失很多信息，造成决策结果不易分辨(即模型失效)的后果，最终得不出有意义的评价结果。

在实际应用中，如果遇到这种情形时，可将因素集 U 按照某些属性分成几类，先对每一类(因素较少)作综合评价，然后再对评价结果进行“类”之间的高层次的综合评价。

具体步骤如下。

设因素集为 $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$，评价集为 $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$。

1. 划分因素集

对因素集 U 作划分，即令

$$U = \{U_1, U_2, \ldots, U_N\}$$

其中 $U_i = \{u_{i1}, u_{i2}, \ldots, u_{ik_i}\}$，$i = 1, 2, ..., N$，$\sum k_i = n$，并且满足

$$\bigcup_{i=1}^{N} U_i = U，\ U_i \cap U_j = \varnothing，\ i \neq j$$

2. 初级评价

对每个 U_i 的 k_i 个因素，按初始模型作模糊综合评价。设 U_i 的因素重要程度模糊集为 A_i，U_i 的 k_i 个因素的评价矩阵为 R_i，则有

$$A_i \circ R_i = B_i = (b_{i1}, b_{i2}, \ldots, b_{im})，\ i = 1, 2, ..., N$$

3. 二级评价

设 $U = \{U_1, U_2, \ldots, U_N\}$ 的因素重要程度模糊集为 A，U 的评价矩阵 R 为

$$R=\begin{pmatrix}B_1\\B_2\\\vdots\\B_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_1\circ R_1\\A_2\circ R_2\\\vdots\\A_n\circ R_n\end{pmatrix}$$

则得出总的(二级)模糊综合评价结果：

$$B=A\circ R$$

这也是因素集 $U=\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ 的最终评价结果。

这种模糊综合评价称为二级模糊综合评价，其评价过程可用图 3 来描述。

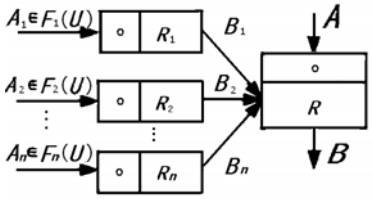

图 3　二级模糊综合评价示意图

如果因素集 U 的元素非常多，还可对它作多级划分，并进行更高层次的综合评价。

例 4　(研究生学业的综合评定)对研究生的学业情况进行考核和评定，通常涉及课程成绩、毕业论文、导师评价、学生自评和他人评价等 5 个方面(因素或指标)，评价的结论一般分为优秀、良好、中等、及格和不及格 5 个等级。

现应用模糊综合评判方法对一名研究生进行综合评价，则因素集和抉择评语集可分别设为：

$U=\{u_1$(课程成绩)，u_2(毕业论文)，u_3(导师评价)，u_4(学生自评)，u_5(他人评价)$\}$

$V=\{v_1$(优秀)，v_2(良好)，v_3(中等)，v_4(及格)，v_5(不及格)$\}$

参照国内外大学通用的评价指标体系，我们取各因素 u_1、u_2、u_3、u_4、u_5 的重要程度系数分别为 $a_1=0.25$，$a_2=0.5$，$a_3=0.15$，$a_4=0.05$，$a_5=0.05$，即，因素重要程度模糊子集为

$$A=(0.25, 0.5, 0.15, 0.05, 0.05)$$

于是，如果我们能够建立起单因素评判：

$$f: U\to\mathscr{F}(V)$$
$$u_i\mapsto R_i=f(u_i)=(r_{i1}, r_{i2}, \ldots, r_{i5})\in\mathscr{F}(V),\quad i=1, 2, ..., n$$

则根据综合评判的初始模型，可得到对这名研究生的综合评价：$B=A\circ R\in\mathscr{F}(V)$，其中 $R=(R_1, R_2, R_3, R_4, R_5)^{\mathrm{T}}$。

然而，课程成绩、论文成绩、导师评价、学生自评和他人评价这 5 个因素，每个又包含若干二级因素，因此对它们每一个的单因素评价，又是一个综合评价问题。所以，这个问题整体来讲是一个二级综合评价问题。

1. 对单因素“课程成绩”进行评价

假设这名研究生共修了 10 门课程，课程类型为三类：学位课，专业非学位课，其它非学位课。由于

三类课程的重要性以及对评价的影响不同，故设三类课程的权重分别为 0.5，0.3，0.2。又假设该生三类课程的平均成绩如下表

课程类别	学位课	专业非学位课	其它非学位课
权重	0.5	0.3	0.2
平均成绩	良	优	中

则获得单因素评判的一种简单方法是取其权重值作为评判值，于是单因素 u_1(课程成绩)的评价向量为

$$R_1 = (r_{11}, r_{12}, r_{13}, r_{14}, r_{15}) = (0.3, 0.5, 0.2, 0, 0) \in \mathcal{F}(V)$$

2. 对单因素“毕业论文”进行评价

论文的评价包含多种子因素，不妨设

$$u_2 = \{ u_{21}(\text{选题}),\ u_{22}(\text{观点及论证}),\ u_{23}(\text{学术成果}),$$
$$u_{24}(\text{文献综述}),\ u_{25}(\text{写作及文风}),\ u_{26}(\text{答辩情况}) \}$$

参照一般的硕士论文评价方法，6 项子因素 u_{21}、u_{22}、u_{23}、u_{24}、u_{25}、u_{26} 的重要程度系数可分别取为 $a_{21} = 0.3$，$a_{22} = 0.3$，$a_{23} = 0.2$，$a_{24} = 0.1$，$a_{25} = 0.05$，$a_{26} = 0.05$。因此，子因素重要程度模糊子集为

$$A_2 = (0.3, 0.3, 0.2, 0.1, 0.05, 0.05)$$

假设参与这名研究生论文评价的有导师、2 名论文评阅人和 5 名论文答辩委员，三类评价者的重要性权重分别为 0.25，0.5，0.25，三类评价者对该论文评价的平均成绩如下表

评价者类别	导师	评阅人		答辩委员				
		1	2	1	2	3	4	5
权重	0.25	0.25	0.25	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05
u_{21}(选题)	优	良	良	良	优	中	中	良
u_{22}(观点及论证)	优	优	良	良	良	良	中	及
u_{23}(学术成果)	优	优	良	优	优	中	中	及
u_{24}(文献综述)	优	优	良	良	中	中	中	及
u_{25}(写作及文风)	优	优	良	良	良	良	良	良
u_{26}(答辩情况)	优	优	优	优	优	优	良	良

则采取权重值作为评判值的单因素评判方法，可得单因素 u_{21}、u_{22}、u_{23}、u_{24}、u_{25}、u_{26} 的评价向量分别为

$$R_{21} = (0.30, 0.60, 0.10, 0.00, 0.00) \in \mathcal{F}(V),\quad R_{22} = (0.50, 0.40, 0.05, 0.05, 0.00) \in \mathcal{F}(V)$$

$$R_{23} = (0.60, 0.25, 0.10, 0.05, 0.00) \in \mathcal{F}(V),\quad R_{24} = (0.50, 0.30, 0.15, 0.05, 0.00) \in \mathcal{F}(V)$$

$$R_{25} = (0.50, 0.50, 0.00, 0.00, 0.00) \in \mathcal{F}(V),\quad R_{25} = (0.90, 0.10, 0.00, 0.00, 0.00) \in \mathcal{F}(V)$$

于是，单因素 u_2 的评价矩阵为

$$R_{2\bullet}=\begin{pmatrix}0.30 & 0.60 & 0.10 & 0.00 & 0.00\\ 0.50 & 0.40 & 0.05 & 0.05 & 0.00\\ 0.60 & 0.25 & 0.10 & 0.05 & 0.00\\ 0.50 & 0.30 & 0.15 & 0.05 & 0.00\\ 0.50 & 0.50 & 0.00 & 0.00 & 0.00\\ 0.90 & 0.10 & 0.00 & 0.00 & 0.00\end{pmatrix}$$

根据主因素决定型综合评判模型 $M(\wedge,\vee)$，可得到对这名研究生的毕业论文评价：

$$R_2 = A_2 \circ R_{2\bullet} = (r_{21}, r_{22}, r_{23}, r_{24}, r_{25}) = (0.3, 0.3, 0.1, 0.05, 0) \in \mathcal{F}(V)$$

3. 对单因素“导师评价”进行评价

根据导师的平时了解，单因素 u_3 的评价向量为

$$R_3 = (r_{31}, r_{32}, r_{33}, r_{34}, r_{35}) = (0.4, 0.5, 0.3, 0, 0) \in \mathcal{F}(V)$$

4. 对单因素“学生自评”进行评价

通过该生对自己进行自评，单因素 u_4 的评价向量为

$$R_4 = (r_{41}, r_{42}, r_{43}, r_{44}, r_{45}) = (0.4, 0.5, 0.3, 0, 0) \in \mathcal{F}(V)$$

5. 对单因素“他人评价”进行评价

通过调查同学、其他教师、教学管理人员等，得到的单因素 u_5 的评价向量为

$$R_5 = (r_{51}, r_{52}, r_{53}, r_{54}, r_{55}) = (0.55, 0.4, 0.05, 0, 0) \in \mathcal{F}(V)$$

综上，得到二级评价矩阵为

$$R=\begin{pmatrix}R_1\\ R_2\\ R_3\\ R_4\\ R_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.30 & 0.50 & 0.20 & 0.00 & 0.00\\ 0.30 & 0.30 & 0.10 & 0.05 & 0.00\\ 0.40 & 0.50 & 0.30 & 0.00 & 0.00\\ 0.40 & 0.50 & 0.30 & 0.00 & 0.00\\ 0.55 & 0.40 & 0.05 & 0.00 & 0.00\end{pmatrix}$$

于是，利用主因素决定型综合评判模型 $M(\wedge,\vee)$，对这名研究生的综合评价为：

$$B = A_2 \circ R = (0.25\ \ 0.5\ \ 0.15\ \ 0.05\ \ 0.05) \circ \begin{pmatrix}0.30 & 0.50 & 0.20 & 0.00 & 0.00\\ 0.30 & 0.30 & 0.10 & 0.05 & 0.00\\ 0.40 & 0.50 & 0.30 & 0.00 & 0.00\\ 0.40 & 0.50 & 0.30 & 0.00 & 0.00\\ 0.55 & 0.40 & 0.05 & 0.00 & 0.00\end{pmatrix}$$

$$= (0.3, 0.3, 0.2, 0.05, 0) \in \mathcal{F}(V)$$

如果采用最大隶属原则，对该研究生的综合评价为“优”或者“良”。

如果采用加权平均原则，则首先对 B 进行归一化得到 B' = (0.3529, 0.3529, 0.2353, 0.0588, 0)，其次设“优”的分值为 (100 + 90)/2 = 95，“良”的分值为 (90 + 80)/2 = 85，“中等”的分值为 (80 + 70)/2 = 75，“及格”的分值为 (70 + 60)/2 = 65，“不及格”的分值为 55，于是，可得该研究生的综合评价成绩为

$$(0.3529, 0.3529, 0.2353, 0.0588, 0)(95, 85, 75, 65, 55)^{T} = 84.9915$$

当然，在评价过程中也可以采用其它模型，如加权平均型综合评价模型 $M(\cdot, +)$。